Задание № 2 Замена переменной и интегрирование по частям в определенном интеграле

*Задание может быть выполнено либо в формате документа Word, либо в виде фотографии выполненного на бумаге решения.*

**20.1**  **Метод интегрирования с прямой заменой переменной (с прямой подстановкой)**

**М20.1.1 Теорема (о замене переменной в неопределенном интеграле)** Если при  имеет место равенство , а  - непрерывно дифференцируемое отображение , то .

*Доказательство.* Получается дифференцированием равенства .

В этом варианте метода замены переменной исходную переменную интегрирования заменяют на функцию новой переменной .

**М20.1.2 Пример 1.** Найти интеграл  при 



[поскольку  и , то  и, следовательно,  , если , то было бы ]

.

**М20.1.3 Пример 2.** Найти интеграл .

Решение: 



**20.2**  **Метод интегрирования с обратной заменой переменной (с обратной подстановкой)**

В этом случае имеем:

.

При удачной подстановке вычисление подынтегрального выражения может существенно упроститься и интеграл находят с применением других методов.

**М20.2.1 Пример 1.** Найти интеграл .

*Решение:* вводим обратную подстановку , тогда , .



.

**М20.2.2 Пример 2.** Найти интеграл .

*Решение:* введем обратную подстановку (*подстановку Эйлера*) , тогда ; таким образом, .

.

**20.3 Простейшие интегралы, содержащие квадратичную функцию (квадратный трехчлен)**

К простейшим интегралам, содержащим квадратичную функцию, относятся интегралы следующего вида: , , , ,  где  - постоянные коэффициенты.

Основной прием приведения таких интегралов к табличным заключается в следующем:

- выделение полного квадрата в трехчлене ;

- применение обратной подстановки .

**М20.3.1 Пример 1.** Найти интегралы  и ;

*Решение:* 

.

.

**М20.3.2 Пример 2.** Найти значение интеграла .

*Решение:* 





.

Интегралы вида  находятся аналогично.

**20.4 Метод интегрирования по частям**

**М20.4.1** Для интегрирования по частям используют формулу , где ,  - дифференцируемые функции. Эта формула является следствием формулы для производной произведения функций.

Алгоритм вычисления интеграла в развернутой математической форме можно представить так: 

.

Удачный выбор функций и  позволяет получить интеграл  как табличный или более простой для вычислений, чем исходный интеграл. Кроме того, интегрирование по частям можно применять многократно.

**М20.4.2** Известны следующие общие рекомендации по выбору функций и  при использовании метода интегрирования по частям:

- в интегралах вида , , , , где  - многочлены, принимают , второй множитель полагают равным ;

- в интегралах вида , , , где  - многочлен принимают , второй множитель полагают равным ;

- в интегралах вида ,  принимают , остальное относят к .

**М20.4.3 Пример 1.** Найти значение интеграла .

*Решение:* .

**М20.4.4 Пример 2.** Найти интеграл .

*Решение:* .

Для вычисления интеграла  снова используем метод интегрирования по частям.

.

Окончательно получаем  (переобозначили ).

При многократном интегрировании по частям возможен вариант циклического интегрирования. В этом случае после n-кратного интегрирования получаем сумму функций и интеграл, который совпадает с точностью до постоянной с исходным интегралом. Полученное равенство рассматривают как уравнение относительно неизвестного интеграла и, решив это уравнение, находят значение интеграла.

**М20.4. 5 Пример 3.** Найти значение интеграла .

*Решение:* 



; .

**Самостоятельная работа:**

12.4.10. Используя метод интегрирования по частям, найти интегралы:

а) ; б) ; в) ; г) ; д) ;

е) ; ж) : з) ;

12.4.11. Используя несколько раз метод интегрирования по частям, найти интегралы:

а) ; б) ; в) ; г) ; д) ;

е) ;

12.4.12. Обозначим . Используя метод интегрирования по частям, вывести зависимость между  и .

12.4.13. Используя результат задачи 12.4.12, найти значения интегралов:

а) ; б) ; в) ;

**Ответы:**

**12.4.10.** а) ; б) ; в) ;

г) ; д) ; е) ;

ж) : з) ;

**12.4.11.** а) ; б) ; в) ;

г) ; д) ; е) ;

**12.4.12.** .

**12.4.13.** а) ; б) ;

в) ;